Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
Андрею Олеговичу Шишанину
К сожалению, на дистанционке мы не видим его грандиозной улыбки
Я очень рад, что он остался вести у нас
Без шуток, серьёзно
Этот человек своими кулстори про матфизиков привил мне любовь к теорфизике
Что поделать, теорфиз в наши времена не моден. Я бы даже сказал, антимоден

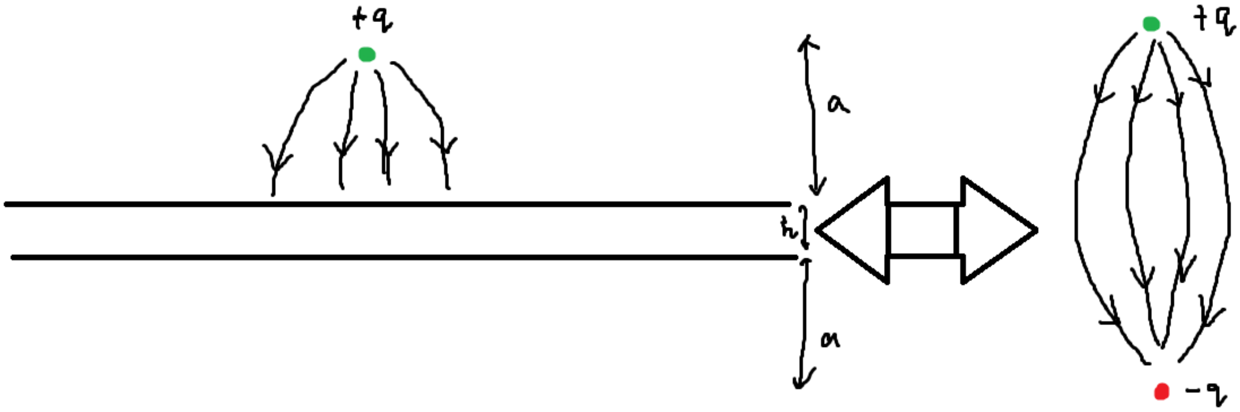
Семинарист: Завкафедры считает, и я с ним согласен, что восьмой том Ландау-Лифшица, посвящённый сплошным средам – бесполезная книга.

Семинарист: (после долгого обсуждения калибровочной теории): Так, давайте вернёмся к 19.1. У нас есть заряд, у нас есть плоскость, и значит плоскость, у нас такой… диэлектрик, он же проводник.

ЗАДАЧА 19.1

19.1. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от поверхности бесконечно протяженной заземленной проводящей пластины толщины h. Найти скалярный потенциал φ. Решение искать методом изображений. Проверить, что решение удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Вычислить плотность поверхностных зарядов σ_S, энергию и силу взаимодействия заряда с пластиной. Найти полный индуцированный заряд.

Наверняка вы все помните эту баянную задачу, которую вы решали, может быть, и в школе, но уж точно на общесосе. Вы без труда вспомните, что решали вы её методом отображений.



Поле взаимодействия заряда с пластиной, на которой индуцируется заряд, такое же, как будто пластины нет, а заряд взаимодействует со своим изображением (красная картинка).

Вы легко сможете найти силу: это будет $q^2/(2a+h)^2$. Да, именно 2a+h, потому что именно такое будет расстояние между зарядом и его изображением (см. рисунок).
А какая будет энергия взаимодействия? Осторожно: хочется сказать, что $-q^2/(2a+h)$. На самом деле вдвое меньше: $q^2/(4a+2h)$. Ведь силовые линии слева в два раза меньше по длине, чем справа, и работа по ним будет в два раза меньше.

А как найти поверхностную плотность индуцированных зарядов? Тут уже без ГУ не обойтись. Что пишет на этот счёт Соколов?

$$\left(D_n^I - D_n^{II}\right)\Big|_\Gamma = 4\pi\rho_{\text{пов}}\Big|_\Gamma$$

$$\left(E_n^I - E_n^{II}\right)\Big|_\Gamma = 4\pi\rho_{\text{полн}}^{\text{пов}}$$

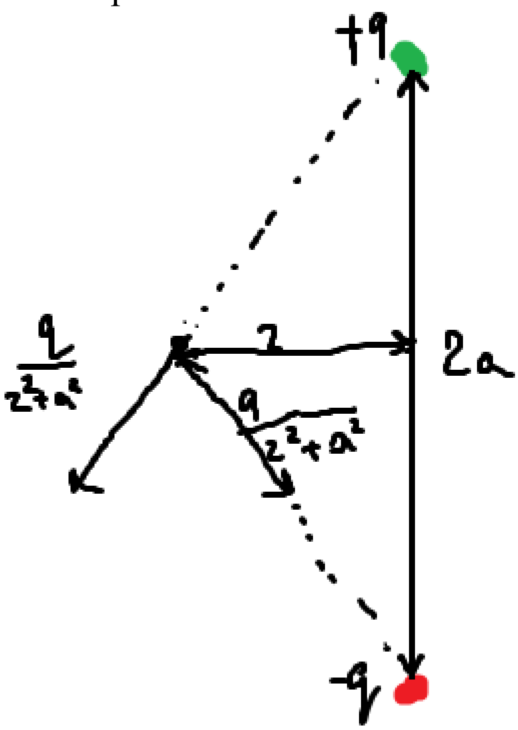
В одном случае D, в одном случае E, в одном случае лишь свободные заряды, в другом полные. Как вы помните, D отвечает только за свободные заряды, а E – это поле, создаваемое всеми задачи. Так что всё логично.

В данном случае у нас проводники, и мы можем не вдаваться в эти подробности, а получить

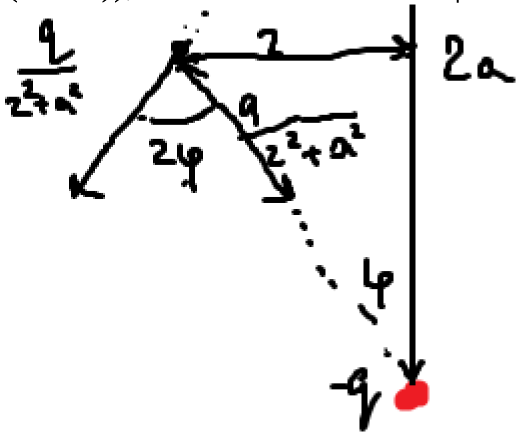
σ=E/(4π)=… а чему, кстати, равна напряжённость на поверхности? Она, очевидно, зависит от r – расстояния до оси, соединяющей заряд со своим изображением.

Чтобы было проще, пренебрежём толщиной пластины (Соколов и Шишанин делают так же).

E от каждого заряда в точке будет $q/(r^2+a^2)$, однако напряжённости не коллинеарны:



И складывать их нужно векторно. Получим $q/(r^2+a^2)*sqrt(2+2cos(2arccos\ a/(r^2+a^2))$, где $\arccos a/r$ – это φ на рисунке:



Ответ можно упростить, если догадаться, что $\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=x^2-1$. Тогда получим в итоге $2q/(r^2+a^2)*a/(r^2+a^2)$.
Тот же ответ мы могли получить проще, если бы сразу догадались, что при сложении векторов сложатся их вертикальные компоненты (суммировать надо было именно их), а горизонтальные уничтожатся.

ЗАДАЧА 19.2

19.2. Точечный заряд q расположен внутри прямого угла, образованного двумя бесконечными полуплоскостями, разграничивающими проводник и вакуум (в первом квадранте). Найти потенциал и плотность поверхностных зарядов.

И эта задача тоже была на общесосе. Я даже скопирую оттуда картинку:

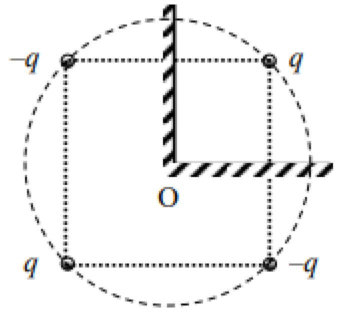


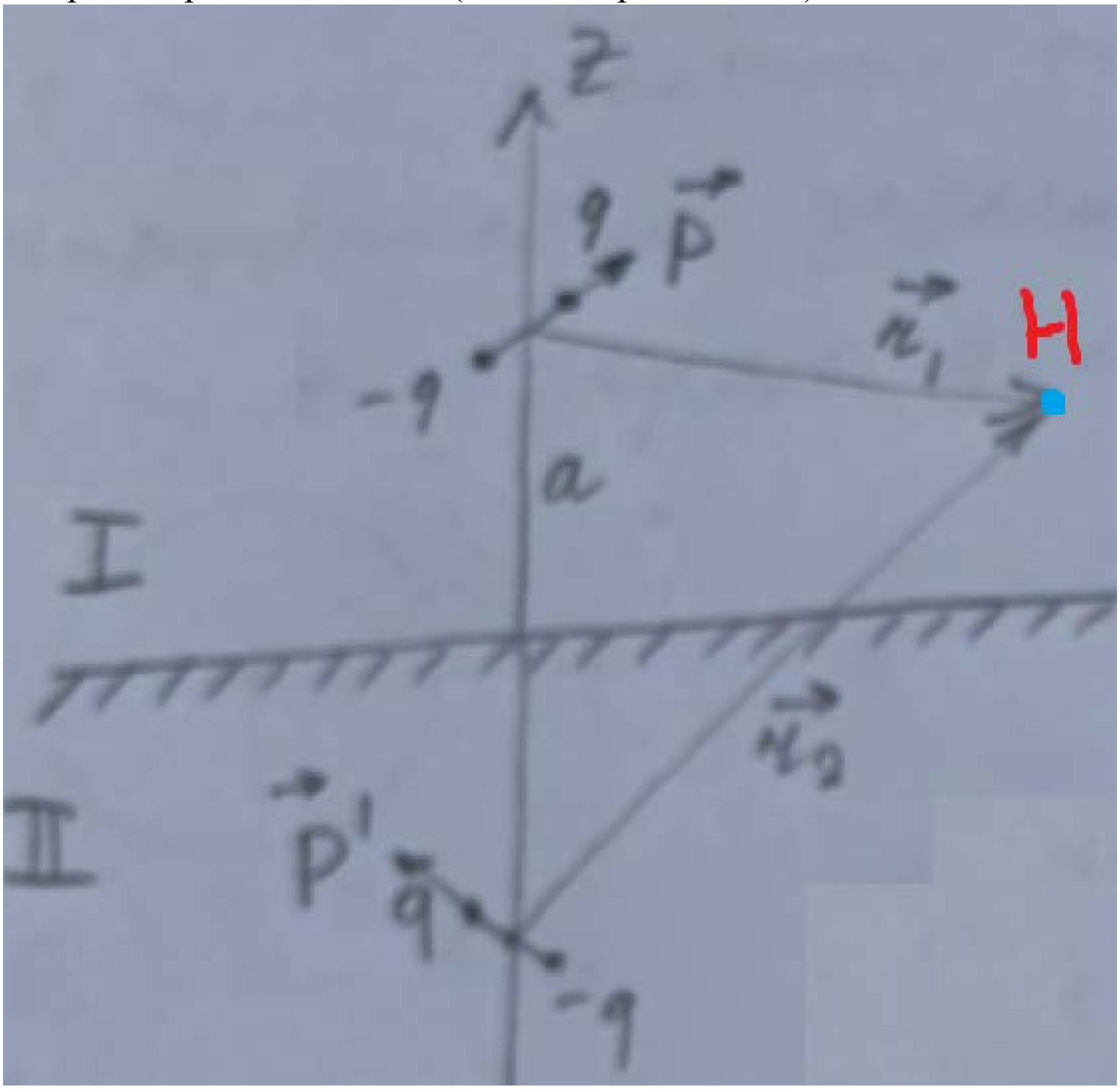
Рис. 6.7. Схема расположения точечного заряда q и его электростатических изображений.

Или я ленивая задница, или я последую примеру Андрея Олеговича, который тоже не доводит задачи до конца – скажу, что изображения перед вами, напряжённости найдёте сами, а поделив на 4π, получите поверхностные плотности.
Вообще я сторонник доводить задачи до конца, но блин, все эти задачи решаются уже в школе, в крайнем случае – на общефизе. То, что им нам дают в 6 семестре – это даже как-то странно.

ЗАДАЧА 19.3

19.3. Точечный диполь $\vec{p}$ расположен в вакууме на расстоянии a от бесконечной плоской границы заземленного проводника. Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов, энергию, силу и момент силы, действующие на диполь.

Давайте построим изображение… диполя. Ранее мы изображение заряда, а теперь изображение диполя (вот мы дерзкие какие).



H – точка наблюдения, т.е. точка, где мы измеряем потенциал. Он равен в точке наблюдения

$$\varphi = \frac{(\vec{p}\vec{r}_1)}{r_1^3} + \frac{(\vec{p}'\vec{r}_2)}{r_2^3}$$

- сумме потенциалов от существующего диполя и от его изображения.

На всякий случай напомню, что формула потенциала идеального диполя именно $\frac{\boldsymbol{pr}}{r^3}$. Вы же помните формулу из пятого семестра для мультипольного излучения?

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \boxed{\frac{1}{r^3}(\bar{p}\,\bar{r})} + \frac{1}{r^5}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + \ldots$$

Итак, потенциал мы уже нашли. А больше я искать ничего не буду, потому что

а) мне лень

б) на экзамене от вас в этой задаче попросят найти лишь потенциал.

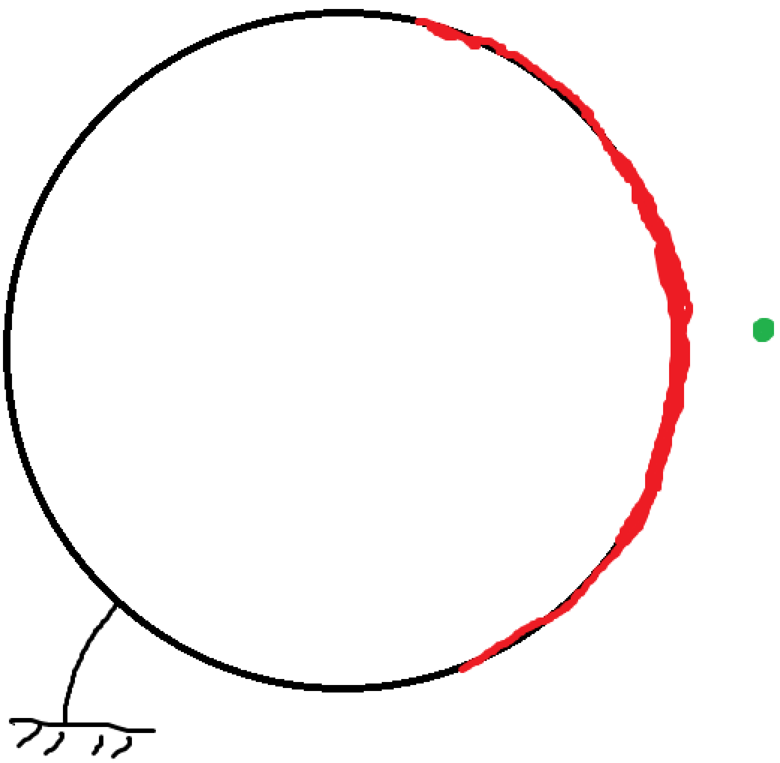
ЗАДАЧИ 19.4 и 19.5

19.4. Точечный заряд q находится на расстоянии a от центра заземленного проводящего шара радиуса R. Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов и полный заряд, индуцированный на шаре, энергию и силу взаимодействия.

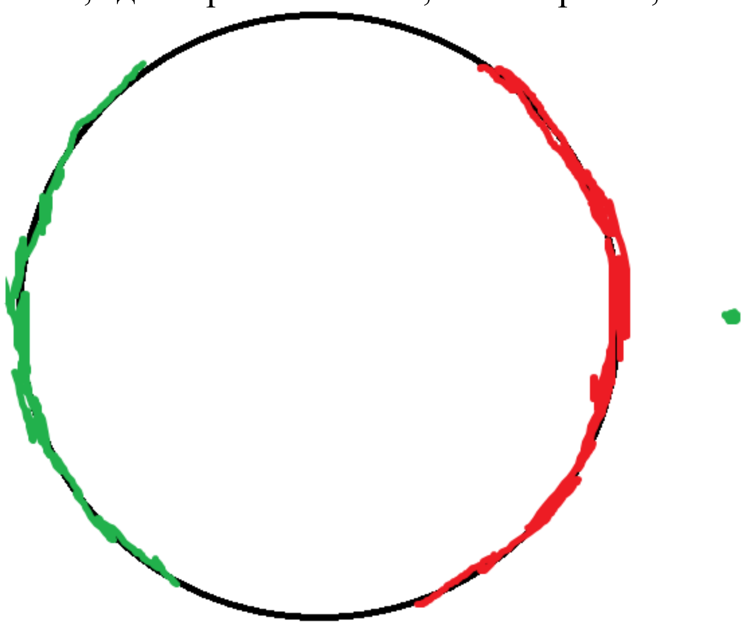
19.5. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от центра изолированного проводящего шара радиуса R, на который нанесен заряд e. Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов, энергию и силу взаимодействия.

Очень похожи и мы их попытаемся решить одновременно.

В результате взаимодействия шара с зарядом на шаре индуцируется заряд. В 19.4, где шар заземлён, он такой



А в 19.5, где шар не заземлён, а изолирован, он такой:

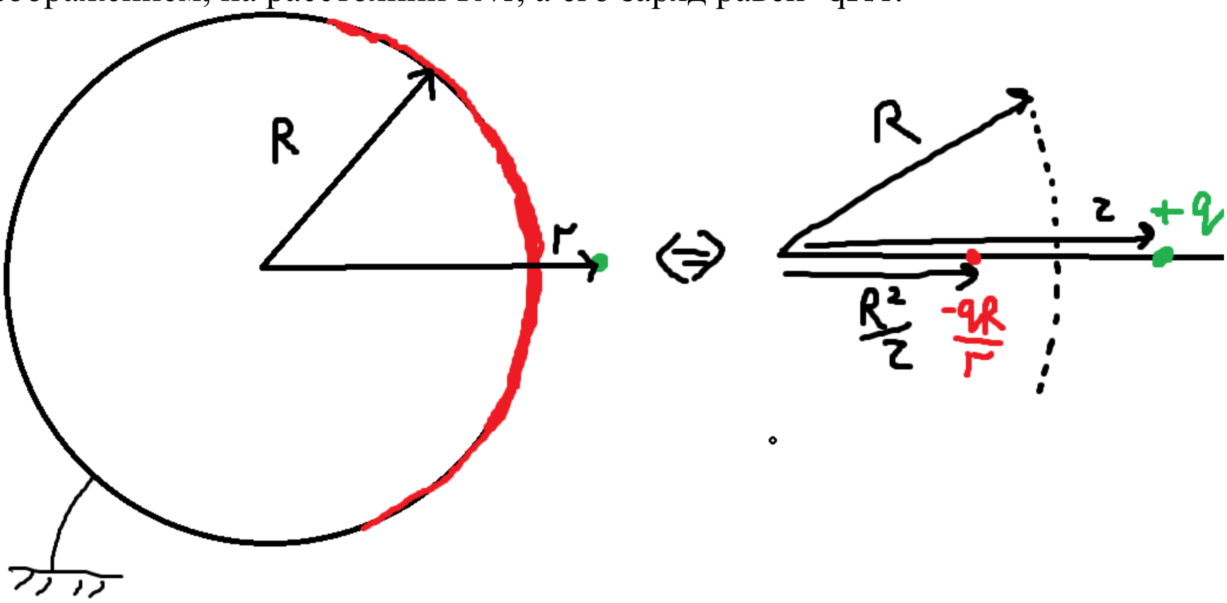


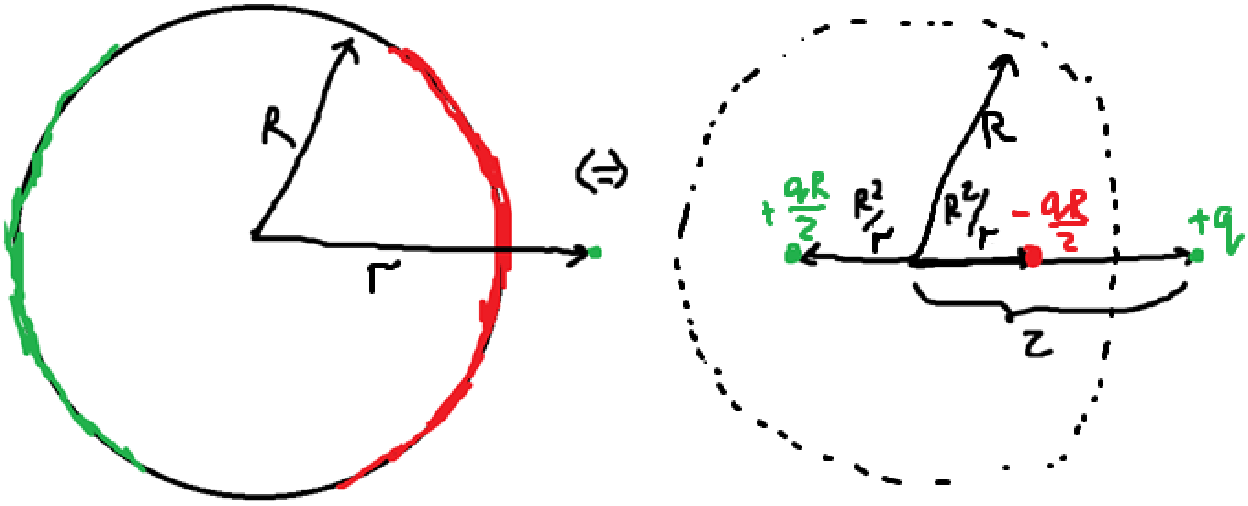
Зелёный заряд положительный, красный отрицательный.
Видите разницу?

Если шар заземлён, а не изолирован, то индуцированного слева «зелёного» заряда нет, он весь ушёл на землю.

А если шар изолирован, и деваться ему некуда – приходиться уходить как можно дальше.

Такие задачи тоже решаются методом изображением. Только вот где оно находится?
Оказывается, если заряд находится на расстоянии r от центра шара, а радиус шара R, то изображение находится на прямой, соединяющей центр шара с изображением, на расстоянии R^2/r, а его заряд равен $-qR/r$:





Это изображение, создаваемое правой половиной сферы (красной). Оно есть на обеих картинках (см. красный заряд справа).

Только в 19.5, где шар изолирован, у нас ещё зелёный заряд слева на шаре. Он даст своё изображение (см. заряд слева на нижнем рисунке). Он будет направлен в другую сторону, слева от центра шара (см. на рисунке), но на том же расстоянии R^2/r.

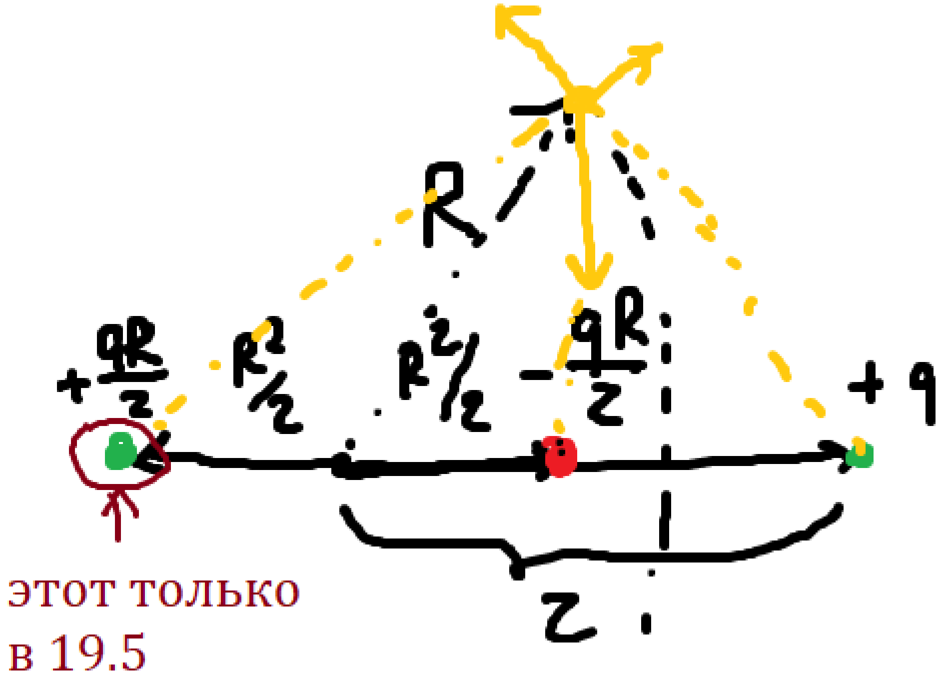
В 19.4 сфера заземлена, и там этого зелёного изображения нет, т.к. в этом случае левая бы половина была бы нейтральна и не давала бы изображения. В 19.5 сфера изолирована=>заряжены обе половины шара=>у нас сразу два изображения, для каждой из половин.

Если в 19.1 изображение было очевидно, то здесь возникает вопрос – а как вообще человечество угадало, где должно быть изображение и какое оно должно быть заряда?
Может быть, вы знаете такое преобразование плоскости, как преобразование инверсии относительно окружности. Вот это оно и есть. Но как человечество догадалось, что нужно именно оно?!

Кто-то скажет «ТФКП, конформное отображение!» Но не все знают и любят ТФКП (например, я).

Более простое объяснение, как можно найти, где должно стоять изображение (и, кстати, какой у него должен быть заряд) – метод неопределённых… в данном случае координат: говорите, что изображение должно быть знака q и находиться в точке с координатами x,y,z (можно использовать и не декартовы координаты). После чего считаете суммарную напряжённость от заряда и изображения на границе проводника, после чего подгоняете q,x,y,z. Если напряжённость везде направлена нормально, поздравляю – данные q,x,y,z годятся.
Упражнение для тех, кому нечем заняться – найти таким образом местоположение изображения и его заряд (считайте горизонтальную ось осью абсцисс, y=z=0 в силу симметрии). А мы же воспользуемся готовыми результатами, которые я озвучил выше.

Задача о поиске поверхностной плотности на сфере свелась к нахождению E от двух в 19.4 и трёх в 19.5 точечных зарядов:



В 19.4, например

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi \text{ от правого заряда} + \varphi \text{ от красного изображения}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{\text{расстояние до правого заряда}} - \frac{\frac{qR}{r}}{\text{расстояние до красного изображения}}$$

Имеется в виду, конечно, расстояние от точки наблюдения **r**

В 19.5 добавится ещё слагаемое, связанное с зелёным изображением.

От нас ещё в этой задаче просят найти плотность поверхностных зарядов. Не беда, воспользуемся формулой $\rho_{\text{пов}} = \frac{E}{4\pi}$, а т.к. $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то $\rho_{\text{пов}} = \frac{-1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Ищем производную по нормали у поверхности шара, находим поверхностную плотность заряда, PROFIT. Чугреев в 19.4 насчитал такую поверхностную плотность зарядов:

$$\rho_{\text{пов}} = \frac{q}{4\pi R} \frac{(R^2-a^2)}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}}$$

Полный заряд? Проинтегрировать поверхностную плотность по шару.

$$Q = \int \rho_{\text{пов}} dS = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q(R^2-a^2)}{4\pi R(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\underset{\xi \equiv \cos\theta}{=} \frac{qR(R^2-a^2)}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{[R^2+a^2-2aR\xi]^{3/2}} = \frac{qR(R^2-a^2)}{2} \left(\frac{1}{aR[\ldots]^{1/2}}\right)\Bigg|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{q}{2a}(R^2-a^2)\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2aR}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2+2aR}}\right) = \frac{q}{2a}(R^2-a^2)\left(\frac{1}{a-R} - \frac{1}{a+R}\right)$$

$$= \frac{2R}{a^2-R^2}\, q\, \frac{(R^2-a^2)}{2a} = -q\frac{R}{a} \equiv q'$$ Совпадает с зарядом изображения

ЗАДАЧА 19.6

19.6. Равномерно заряженная тонкая нить (линейная плотность заряда κ) расположена на расстоянии a от оси проводящего незаряженного цилиндра радиуса R, $a > R$ параллельно этой оси. Найти потенциал результирующего электрического поля. Найти плотность поверхностных зарядов на цилиндре, а также энергию и силу взаимодействия нити с цилиндром, приходящиеся на единицу длины.

Задача очень похожа на 19.4. Выполним рисунок в плоскости сечения цилиндра и нити:

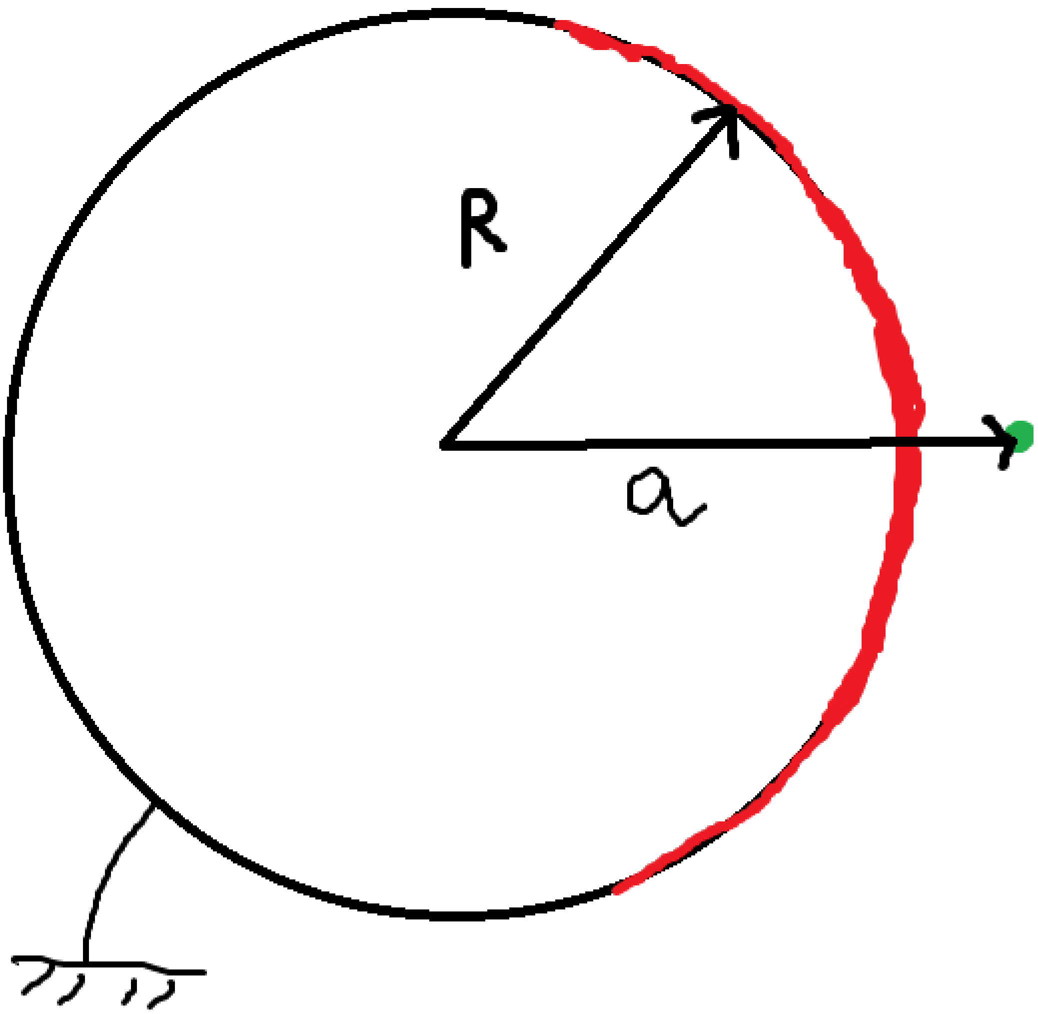
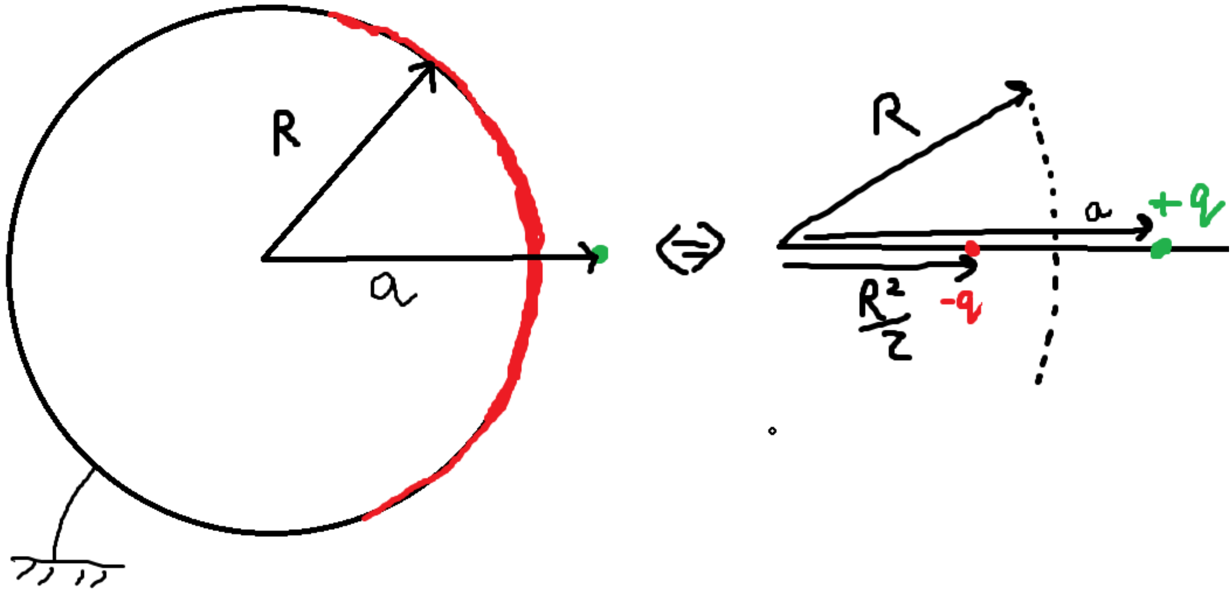


Рисунок тот же, но смысл в другом – если в 19.4 и 19.5 у нас было 3D, в 19.6 у нас 2D.
Из-за этого изображение, хоть и будет находиться на том же месте, будет заряда –q, а не +qR/a:



А далее задача решается, как 19.4. Можно я не буду решать дальше? Однотипные простые общефизные задачи вы можете и сами решить.